2do Parcial

Algoritmos y Estructuras de Datos 3 – DC, FCEyN, UBA

10/11/2021

Para realizar consultas, deben conectarse por Discord al canal de le docente a le cual quieran consultar. Tener en cuenta que une docente no puede conectarse con dos estudiantes en simultáneo. Las aclaraciones de enunciado que podamos llegar a hacer van a ser comunicadas vía Discord al canal de consultas de la práctica.

El examen transcurre de 17:00 a 21:00 hs. A las 21:00 se desconectarán les docentes de sus canales de Discord y tendrán hasta las 23:00 para realizar la entrega vía campus. (Luego de este horario, las entregas serán rechazadas.) El archivo subido al campus puede sobreescribirse una cantidad ilimitada de veces hasta la hora de entrega. Independientemente de si sobreescriben o no, deberán confirmar su entrega definitiva (que ya no podrá sobreescribirse). Sólo en caso de que el Campus estuviera saturado y no funcionara, sería adecuado realizar la entrega por mail a algo3-doc@dc.uba.ar con copia a fsoulign@dc.uba.ar indicando claramente la entrega en el asunto.

El examen puede realizarse **a mano** o en **computadora**. En el primer caso, deben **escanearlo o fotografiarlo** y deben **unir y comprimir** las páginas resultantes para generar un único archivo en **formato PDF** con un **peso razonable**. El resultado debe ser un documento **legible** (buena iluminación, buena resolución, buena orientación, no fotos cortadas, etc.) y que tenga un **orden de lectura claro**, **¡verificarlo!**. En el segundo caso, el formato debe ser **PDF** o **texto plano (txt)**. Por cuestiones de compatibilidad, **no** se aceptan entregas en otros formatos (zip, rar, jpg, gif, png, tiff, etc). **Tampoco** se aceptan entregas de links a repositorios personales.

El examen es personal y pueden usar las teóricas, las clases prácticas y las guías de ejercicios, citando claramente. Las respuestas deben estar debidamente justificadas incluso en aquellos ejercicios en los que este hecho no es recordado.

El examen se **aprueba** con al menos uno de los ejercicios 1–2 aprobados y al menos uno de los ejercicios 3–4 aprobados.

1) Sea G un digrafo con pesos positivos que tiene dos vértices especiales s y t. Para una arista $e \notin E(G)$ con peso positivo, definimos $G + e$ como el digrafo que se obtiene de agregar e a G. Decimos que e mejora el camino de s a t cuando $d_G(s,t) > d_{G+e}(s,t)$.[1] Diseñar un algoritmo de complejidad temporal $O(|E| + \text{mín}\{n^2, m \log n\})$ que, dado un grafo G y un conjunto de aristas $E \notin E(G)$ con pesos positivos, determine cuáles aristas de E mejoran el camino de s a t en G.

2) Sea G un grafo donde cada arista pertence a un único ciclo. Supongamos, además, que cada arista e tiene asociado un conjunto de colores *asignable* $K(e) \subseteq \{1, \dots, n\}$. Dado $k \in \mathbb{N}$, queremos seleccionar $n - 1$ aristas de G para formar un árbol generador T. Más aún, queremos **asignarle** un color $q(e) \in K(e)$ a cada arista e de forma tal que ningún color $i \in \{1, \dots, n\}$ sea asignado a más de k aristas (formalmente, $|\{e \mid q(e) = i\}| \leq k$

[1] Recordar que $d_H(x, y)$ denota el mínimo de entre los pesos de los caminos de H que van de x a y.

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$). Notar que, como T es un árbol generador de G, entonces hay que seleccionar exactamente $|C| - 1$ aristas de G por cada ciclo $|C|$.

a) Proponer un modelo de flujo que permita resolver el problema de selección de las aristas. Puede suponer que los ciclos $C_1, \dots, C_h$ de G son conocidos. **Ayuda:** considere tres conjuntos de vértices en el modelo, que representen los ciclos de G, las aristas de G, y los colores $\{1, \dots, n\}$, respectivamente.

b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

c) Indicar cómo se interpreta el flujo máximo del modelo y cómo se construye T en caso que exista.

d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp. La cota debe estar expresada en función de n. **Importante:** no hace falta considerar el costo de computar el modelo o los ciclos $C_1, \dots, C_h$; notar que G tiene $O(n)$ aristas y ciclos, hecho que no hace falta demostrar.

3) Considerar los siguientes problemas, teniendo en cuenta que un conjunto de vértices D de un grafo G es un *conjunto dominante independiente* cuando D es a la vez dominante e independiente[2]:

- DOM-IND: dado un grafo G y un natural k, ¿tiene G un conjunto dominante independiente con a exactamente k vértices?
- k-DOM-IND: dado un digrafo G, ¿tiene G un conjunto dominante independiente con exactamente k vértices?
- UNIQUE DOM-IND: dado un digrafo G y un conjunto dominante independiente I ¿es I el único conjunto dominante independiente de G con tamaño $|I|$?

a) Demostrar que k-DOM-IND es polinomial.

b) Proponer un certificado y un verificador que demuestre que UNIQUE DOM-IND pertenece a coNP.

c) Demostrar que UNIQUE DOM-IND es coNP-completo utilizando que DOM-IND es NP-completo. **Ayuda:** agregue vértices para forzar la existencia de un conjunto dominante independiente que no exista originalmente en el grafo.

4) Para este ejercicio, suponer que los resultados del ejercicio anterior son válidos.

a) Suponiendo que se descubre que no existe ningún algoritmo polinomial para certificar instancias positivas de UNIQUE DOM-IND, demuestre que SAT no se puede reducir en tiempo polinomial a k-DOM-IND.

b) Suponiendo que se descubre un algorito polinomial para certificar instancias positivas de UNIQUE DOM-IND. Describa un algoritmo polinomial que permita certificar instancias negativas de SAT.

[2] Ver ej. 22 de la Guía 6 para las definiciones de dominante e independiente.)